



Mathematik für Informatiker 1, WS 2017/18
Klausurvorbereitungsblatt

1. Geben Sie jeweils eine Funktion mit den angegebenen Eigenschaften an und weisen sie diese nach.

- a) $f : [\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow [-2, 2]$ ist injektiv und streng monoton fallend.
b) $f : [0, 1) \rightarrow [-1, 1]$ ist surjektiv und monoton wachsend.
c) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ist nach oben, aber nicht nach unten beschränkt.

2. Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind injektiv? Welche sind surjektiv? (Begründen Sie Ihre Antworten.) Berechnen Sie in jedem Fall $f([-1, 1])$ und $f^{-1}([-1, 1])$.

(i) $f_1(x) = \begin{cases} x, & x \notin \mathbb{Z}, \\ x - 1, & x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ (ii) $f_2(x) = \begin{cases} x, & x \notin \mathbb{Z}, \\ x^2, & x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

- (i) $7 | (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ für jede natürliche Zahl n .
(ii) $n\sqrt{n} > n + \sqrt{n}$ für jede natürliche Zahl $n \geq 4$.
(iii) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{n}{4(n+4)}$ für jede natürliche Zahl n .

4. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und die Relationen \sim_a, \dots, \sim_e auf \mathbb{R} durch

$$\begin{aligned} x \sim_a y &\Leftrightarrow x \neq y, \\ x \sim_b y &\Leftrightarrow x \leq y, \\ x \sim_c y &\Leftrightarrow x \cdot y \geq 0, \\ x \sim_d y &\Leftrightarrow x \geq y^2, \\ x \sim_e y &\Leftrightarrow x + y \text{ ist eine ganze Zahl} \end{aligned}$$

gegeben. Welche dieser Relationen ist reflexiv, konnex, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch und/oder transitiv? Welche dieser Relationen ist eine Äquivalenzrelation und/oder eine partielle Ordnung?

5. Finden Sie $[6533]^{-1}$ in \mathbb{Z}_{7039} , $[64]^{-1}$ in \mathbb{Z}_{135} und $[543626]^{-1}$ in $\mathbb{Z}_{5436261}$.

6. Berechnen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme.

$$(i) \quad \begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{5}, \\ x &\equiv 2 \pmod{7}, \\ x &\equiv 3 \pmod{11}. \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{3}, \\ x &\equiv 1 \pmod{4}, \\ x &\equiv 0 \pmod{7}. \end{aligned}$$

7. Finden Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen.

a) $3z^2 + z = 0$

e) $\cos z = -\frac{5}{4}$

i) $z^3 = 1$

b) $\cos z = 0$

f) $z + \bar{z} = 1$

j) $(z^2 - 1)^3 = 8z^3$

c) $\sinh z = 0$

g) $(1 - i)z^2 = 1 + 7i$

k) $e^z = 1$

d) $\tan z = 1$

h) $(1 - i)z^2 = (1 + i)z$

l) $e^{iz} + 4e^{-iz} = 4$

8. Prüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + e^n}{2^n}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 + 6n + 12}{\sqrt{n^8 + n^2}}$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n^2 + n^3}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n}$.

9. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^{n^2}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{626} x^n$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3n4^n} x^n$.

10. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 3n + 1} - n$,

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$,

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^5} + 2n) \cdot \left(\sin^2\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right)}{(n+1)^2 \sqrt[3]{1+2n}}$,

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 4x + 3}$,

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(x))}{\sin(x)}$,

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)^{7x}$.

11. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) $f(x) = x^2 - x,$

c) $f(x) = x^5 + x + 1,$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1},$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 8}{(x - 2)^2}.$

12. Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und untersuchen Sie die Funktionen auf Differenzierbarkeit.

a) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -1, \\ x^2, & -1 < x < 1, \\ 2x - 1, & x \geq 1. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x - 3, & x < -1, \\ 2x, & -1 < x < 1, \\ -x + 3, & x > 1, \\ -2, & x \in \{-1, 1\}. \end{cases}$

13. Berechnen Sie die Taylor-Reihe mit Entwicklungspunkt 0 der durch die folgenden Formeln definierten Funktionen und geben Sie ihre Konvergenzradien an.

a) $\frac{1}{1 - x^2},$

c) $e^{4x^2},$

e) $\frac{1 - \cos(4x)}{2x},$

b) $\frac{x}{1 + 8x^3},$

d) $\frac{1}{2 - 4x},$

f) $\frac{1 - \cos(x^2)}{x^4}.$

14. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Formel

$$f(x) = \frac{1}{2 - 3x}$$

definiert. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{n! 3^n}{(2 - 3x)^n}$$

für jede natürliche Zahl n gilt und leiten Sie daraus die Taylor-Reihe von f mit dem Entwicklungspunkt 0 her. Geben Sie den Konvergenzradius der Reihe an.

15. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{9}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Formel

$$f(x) = \frac{1}{(2x + 9)^2}$$

definiert. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = (-1)^n 2^n (n + 1)! (2x + 9)^{-(n+2)}$$

für jede natürliche Zahl n gilt und leiten Sie daraus die Taylor-Reihe von f mit dem Entwicklungspunkt -4 her. Geben Sie den Konvergenzradius der Reihe an.

16. Berechnen Sie

$$\frac{d}{dx} (\log(1 + x))$$

und leiten Sie daraus die Taylor-Reihe von $\log(1 + x)$ mit Entwicklungspunkt 0 her. Geben Sie den Konvergenzradius der Reihe an.