UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 1, WS 2017/18
Übungsblatt 5

---

1. Beweisen Sie mit Hilfe des Schubfachprinzips:

(a) Unter 7 ganzen Zahlen gibt es mindestens zwei, deren Differenz durch 6 teilbar ist.

(b) Es sei n eine natürliche Zahl. Unter beliebigen n^2+1 Punkten $P_1, \ldots, P_{n^2+1}$ in einem Quadrat der Kantenlänge n gibt es mindestens zwei Punkte mit Abstand ≤ 2.

(c) Unter 51 ganzen Zahlen zwischen 1 und 100 gibt es mindestens zwei, deren Summe gleich 101 ist.

2. Beweisen Sie, dass die Menge aller Primzahlen unendlich ist. [Hinweis: Modifizieren Sie den Beweis, dass die Menge $\mathbb{N}$ unendlich ist. Sie dürfen annehmen, dass eine natürliche Zahl $m \geq 2$ entweder eine Primzahl oder durch eine Primzahl teilbar ist.]

3. (a) Beweisen Sie, dass die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ abzählbar unendlich ist. [Hinweis: Ordnen Sie die Teilmengen nach der Summe ihrer Elemente.]

(b) Es seien A_1, A_2, A_3, ... abzählbar unendliche Mengen. Zeigen Sie, dass $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ ebenfalls abzählbar unendlich ist. [Hinweis: Bezeichnen Sie die Elemente von A_i mit $\{a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, a_{i,4}, \ldots\}$ und verwenden Sie ein Diagonalargument, um die Elemente $\{a_{i,j}\}_{i,j=1,2,\ldots}$ von $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ abzuzählen.]

4. (a) Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichungen

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{3}, \\ x &\equiv 5 \pmod{7}, \\ x &\equiv 8 \pmod{11}, \end{aligned}$$

indem Sie den chinesischen Restsatz zweimal anwenden.

(b) Was sind die letzten beiden Ziffer der Zahl 49^{19}? [Hinweis: Wir wollen die Zahl $49^{19} \pmod{100}$ berechnen. Es gilt $100 = 25 \times 4$.]